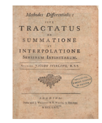
1 Échauffement



$\mathcal{X}$1.1 Factorielle double

▶Utiliser la formule de Stirling pour caractériser la croissance asymptitique de la *factorielle double* :

$$(2k+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1) \quad (2k)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k) \qquad \{k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Indice: *écrire* $(2k)!! = (k!)\prod_{i=1}^{k} 2$, $(2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{\prod_{i=1}^{k}(2i)} = \frac{(2k+1)!}{(k!)\prod_{i=1}^{k} 2}$, *et se servir de la formule de Stirling* $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$.

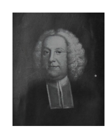
$\mathcal{X}$1.2 Égalités Fibonacci

▶Démontrer les égalités suivantes pour les nombres Fibonacci $F(n) = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ par induction en n.

$$\sum_{k=0}^{n} F(k) = F(n+2) - 1; \tag{1.1a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kF(k) = nF(n+2) - F(n+3) + 2. \tag{1.1b}$$

Indice: *Démontrez les égalités pour les cas de base (il y en a deux !) et procédez dans le cas inductif en utilisant la définition. Il est utile de commencer avec des rélations de récurrence pour le côté gauche : p.e.,* $S(n) = \sum_{k=0}^{n} F(k)$*, et on montre la récursion pour* $S(n)$ *en termes de* $S(n-1)$ *(et* $S(n-2), S(n-1), \ldots$ *si nécessaire).*



$\mathcal{X}$1.3 Les nombres Pell

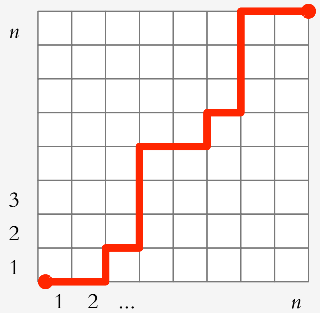
▶Caractériser la croissance des nombres Pell $P(n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$P(n) = \begin{cases} 0 & \{n = 0\} \\ 1 & \{n = 1\} \\ 2P(n-1) + P(n-2) & \{n > 1\}. \end{cases}$$

Indice: *«Devinez» la croissance* $P(n) \sim q^n$*, déterminez les deux racines* q_1, q_2*, et cherchez les facteurs* α, β *dans la combinaison linéaire* $P(n) = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ *qui assurent* $P(0) = 0$, $P(1) = 1$.

$\mathcal{X}$1.4 Chemins sur une grille

On veut compter les chemins sur une grille $n \times n$.



Un chemin sur la grille $n \times n$ est une séquence $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_m, y_m) = (n, n)$, et $(x_i, y_i) \in \bigl\{(x_{i-1} + 1, y_{i-1}), (x_{i-1}, y_{i-1}+1)\bigr\}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$. (Dans d'autres mots, on peut déplacer seulement vers le droit ou vers le haut par une case.)

a. ►Démontrer que le nombre de chemins $C(n)$ est

$$C(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!) \cdot (n!)}.$$

b. ►Utiliser la formule de Stirling pour caractériser la croissance asymptotique de $C(n)$.

$\mathcal{X}$1.5 Déplacements dans les Tours de Hanoï

►Démontrer que pour tout disque $m = 1, 2, \ldots, n$ l'algorithme des Tours de Hanoï le déplace 2^{n-m} fois au total.

Indice: *Développez une preuve par induction à partir du code de l'algorithme.*

```
    HANOI(i ↷ j ↷ k, n)              // (déplacements pour Tours de Hanoï)
H1  if n ≠ 0 then
H2      HANOI(i ↷ j ↷ k, n − 1)
H3      MOVE(i → j)                  // (déplacer disque de tour i à tour j)
H4      HANOI(k ↷ i ↷ j, n − 1)
```

$\mathcal{X}$1.6 Euclide en binaire

Le plus grand diviseur commun (gcd) est souvent calculé par une version binaire de l'algorithme d'Euclide, publié par Josef Stein en 1967. L'avantage de la version binaire est qu'on n'a pas besoin de division entière, mais seulement décalage de bits

(2× ou /2) et soustraction. L'algorithme utilise des règles «binaires» de récurrence :

$$\begin{aligned}
\gcd(x,y) &= \gcd(y,x) && \\
\gcd(x,y) &= 2\cdot\gcd(x/2,y/2) && \text{si } x,y \text{ sont pairs}\\
\gcd(x,y) &= \gcd(x/2,y) && \text{si } x \text{ est pair et } y \text{ est impair}\\
\gcd(x,y) &= \gcd(x-y,y) && \text{si } x\ge y
\end{aligned}$$

▶ Donnez un algorithme basé sur ces règles binaires.

Indice: *Notez qu'ici il faut déterminer quand utiliser quelle règle, et quand arrêter le calcul. Pour achever le temps logarithmique, il faut assurer que la quatrième règle n'est pas utilisée trop souvent. (Si on l'applique toujours avec $y = 1$, l'algorithme prend un temps linéaire dans x [et non pas dans le nombre bits de x] ...) Faites attention aux tests $x \ge y$.*

$\mathcal{X}$1.7 Nombre harmonique

Le **nombre harmonique** $H(n)$ est défini pour tout $n = 1, 2, \ldots$ par

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a. ▶ Donnez une définition récursive de $H(n)$.

b. ▶ Démontrez par induction que pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$H\bigl(2015^k\bigr) \ge 1 + \frac{2014}{2015}k.$$

Indice: *Utilisez la borne $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \ge m \times \min\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ pour les termes de $H(2015^{k+1}) - H(2015^k)$ dans le cas inductif.*

c. ▶ Démontrez par induction qu'il existe une constante c telle que pour tout nombre Fibonacci $F(n)$ avec $n = 2, 3, 4, \ldots,$

$$H(F(n)) \ge \frac{n-2}{\phi^2} + c \qquad \text{où } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

REMARQUE. Cet exercice montre que la croissance de $H(n)$ est au moins logarithmique en n. En vérité, $H(n) = \gamma + \ln n + e(n)$, avec une erreur $\lim_{n\to\infty} e(n) = 0$. La limite $\gamma = \lim_{n\to\infty}\bigl(H(n) - \ln n\bigr) = 0.57721\cdots$ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni.